EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.071**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta $x+y=1$.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\dfrac{1+i}{1-i}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}$.

(4p) **d)** Să se calculeze $\sin x$, dacă $x\in(0,\pi)$ şi $\cos x=\dfrac{1}{2}$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația planului care trece prin punctul $A(1,1,1)$ şi este paralel cu planul $x-y+3z=2$.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=2$ în punctul $T(1,1)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul funcțiilor surjective $f:\{1, 2, 3\}\to\{0, 1\}$.

(3p) **b)** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x+1$. Să se calculeze $f(g(x))$, pentru $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze numărul submulțimilor cu trei elemente ale unei mulțimi cu cinci elemente.

(3p) **d)** Să se calculeze $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5}+...+\widehat{11}$ în grupul $(\mathrm{Z}_{12},+)$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element din $\mathbf{Z}_{12}$ să fie soluție a ecuației $\hat{x}^2=\hat{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă.

(3p) **d)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(3p) **e)** Să se arate că $e^x\geq x+1$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulțimea

$G = \left\{ A \in M_3(\mathbf{R}) \;\middle|\; A \cdot A^T = I_3 \;\; și \;\; \det(A) > 0 \right\}$, unde A^T este transpusa matricei A.

Se ştie că $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$, $\forall\, X, Y \in M_3(\mathbf{R})$.

(4p) **a)** Să se arate că $I_3 \in G$ şi $C \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că dacă , $A, B \in G$ atunci $A \cdot B \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $A \in G$, atunci matricea A este inversabilă şi $A^{-1} \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că $det(A) = 1$, $\forall A \in G$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru orice $A \in G$, $(A^T - I_3) \cdot A = I_3 - A$.

(2p) **f)** Să se arate că pentru orice $A \in G$, $\det(A - I_3) = 0$.

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice $A \in G$, există $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$, $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, astfel încât $A \cdot X = X$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $t_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $t_n(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$ şi

$f_n(x) = t_n^{(n)}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Prin $u^{(n)}(x)$ am notat derivata de ordinul n a funcției $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în punctul x.

(4p) **a)** Să se calculeze $f_1(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f_2'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f_1(x)\, dx$.

(2p) **d)** Dacă $f_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$, cu $a_i \in \mathbf{R}$, $\forall\, i \in \{0, 1, ..., n\}$ să se determine coeficientul a_n, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $t_n^{(k)}(1) = t_n^{(k)}(-1) = 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție de n ori derivabilă pe $\mathbf{R}$, cu $g^{(n)}$ continuă pe $\mathbf{R}$, atunci $\int_{-1}^{1} f_n(x) \cdot g(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)^n \cdot g^{(n)}(x)\, dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_{-1}^{1} f_n(x) \cdot h(x)\, dx = 0$, pentru orice funcție polinomială $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de grad mai mic sau egal cu $n - 1$.